Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Total	Nota

Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**. Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Conteste en forma ordenada, una pregunta por hoja y justifique adecuadamente cada respuesta.
- Debe realizar su prueba en su respectiva sección, de lo contrario será calificado con nota mínima.
- Queda prohibido el uso de calculadoras, formulario y **celulares**.

Nota $= 1+\dfrac{Puntos}{10}$. **Duración** = 60 minutos

---

1) **[20 ptos.]** Estudiar la convergencia o divergencia de las siguientes series. **(Justifique cada una de sus respuestas)**

   a) **[10 ptos.]** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{e^n}$

   b) **[10 ptos.]** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n!)}{n \cdot 3^n}$

2) **[20 ptos.]** Hallar el centro, radio de convergencia, intervalo de convergencia de la serie de potencia

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(3x-1)^n}{n^2 \cdot 6^n}$$

   Nota: No olvide analizar los extremos del intervalo de convergencia. **(Justifique adecuadamente)**

3) **[20 ptos.]** Dada la función $f(x) = \sin(x)$, se pide

   a) **[13 ptos.]** obtener la serie de Taylor en $f(x)$ en torno de $x = \dfrac{\pi}{2}$ y su intervalo de convergencia.

   b) **[7 ptos.]** usando la parte $a)$ deduzca que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{\pi^2}{16}\right)^n$ converge a $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Pauta:

1) *a*) Note que para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple:

$$\left|\frac{\sin(n!)}{n \cdot 3^n}\right| \leq \frac{1}{n \cdot 3^n} \leq \frac{1}{3^n}$$

Además, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ converge, pues es una <u>serie geométrica</u> con $r = \dfrac{1}{3} < 1$.

5 puntos

Luego, por el <u>criterio de comparación</u> la $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n!)}{n \cdot 3^n}$ <u>converge absolutamente</u> y por lo tanto, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n!)}{n \cdot 3^n}$ es **convergente**.

5 puntos

b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2(n+1)}}{e^n}}{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e} \cdot \left(\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}\right)^2 = \frac{1}{e} < 1$$ **5 puntos**

Por lo tanto el <u>criterio del cuociente</u>, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{e^n}$ es **convergente**.

5 puntos

2) *a)* **Centro y término general:**

$$x_0 = \frac{1}{3} \qquad \text{y} \qquad a_n = \frac{(-1)^n}{n^2 \cdot 2^n}$$

4 puntos

b) **Radio de convergencia:**

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2 \cdot 2^n} \cdot \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)^2}{(-1)^{n+1}} \right| = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 2$$

4 puntos

c) **Intervalo de convergencia:**

$$]x_0 - R, x_0 + R[= \left] -\frac{5}{3}, \frac{7}{3} \right[$$

3 puntos

d) **Análisis de los extremos:**

- Para $x = -\frac{5}{3}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(-6)^n}{n^2 \cdot 6^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{(Serie p)}$$

Entonces, por el **criterio de las p serie**, la serie **converge**.

3 puntos

- Para $x = \frac{7}{3}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 6^n}{n^2 \cdot 6^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Entonces, por el **criterio de Leibnitz**, la serie **converge**.

3 puntos

Por lo tanto el intervalo de convergencia es $\left[-\frac{5}{3}, \frac{7}{3} \right]$

3 puntos

3) *a*) Sea $f(x) = \sin x$. Entonces

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin x & \Longrightarrow \quad & f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\
f'(x) &= \cos x & \Longrightarrow \quad & f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\
f''(x) &= -\sin x & \Longrightarrow \quad & f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \\
f'''(x) &= -\cos x & \Longrightarrow \quad & f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\
f^{(4)}(x) &= \sin x & \Longrightarrow \quad & f^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\
f^{(5)}(x) &= \cos x & \Longrightarrow \quad & f^{(5)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\
f^{(6)}(x) &= -\sin x & \Longrightarrow \quad & f^{(6)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \\
f^{(7)}(x) &= -\cos x & \Longrightarrow \quad & f^{(7)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\
&\vdots & \vdots \quad & \vdots
\end{aligned}$$

5 puntos

Note que para todo $n \in \mathbb{N}$: $f^{(2n)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n$ y $f^{(2n+1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Así, la serie de Taylor de f en torno a $\frac{\pi}{2}$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n}$$

5 puntos

Además $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(2n)!(x-\pi/2)^{2n+2}}{(-1)^n(2n+2)!(x-\pi/2)^{2n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(x-\pi/2)^2}{(2n+1)(2n+2)} = 0$

Luego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n} \quad , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

3 puntos

b) Reemplazando $x = \frac{\pi}{4}$ en la serie de Taylor, se tiene $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{\pi^2}{16}\right)^n$ converge a $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

7 puntos